TEMA 1. LOS NÚMEROS REALES

1. Los números naturales

Los **números naturales** son los que se utilizan para contar: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 …

Con los números naturales podemos realizar diferentes operaciones, como:

- **Suma**: 234 + 451 = 685
- **Resta**: 12 – 3 = 9 (Atención: para poder restar números naturales, el minuendo ha de ser mayor o igual que el sustraendo)
- **Multiplicación**: 3·4 = 12
- **División**: 14:7 = 2 (Atención: Nunca se puede dividir entre 0)

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

Siempre que tenemos operaciones combinadas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, hay que realizarlas en este orden:

1º. Paréntesis y corchetes: siempre de dentro hacia fuera.

2º. Multiplicación y división: en el orden en que aparecen.

3º. Suma y resta: en el orden en que aparecen.

Veamos un ejemplo:

$3 + [4·5 – 2·(5-1)]·7 =$

(primero haremos el paréntesis de 5 – 1 = 4)

$= 3 + [4·5 – 2·4]·7 =$

(ahora el corchete. Para ello hacemos las multiplicaciones primero)

$= 3 + [20 – 8] · 7 =$

(continuamos con la resta que hay dentro del corchete)

$= 3 + 12 · 7 =$ (la multiplicación)

$= 3 + 84 = 87$

2. Operaciones con números enteros.

Hay muchas ocasiones que no se pueden expresar utilizando sólo los números naturales, sino que son necesarios otro tipo de números:

- Un ascensor que baja al 2º sótano.
- Una temperatura de 3º bajo cero.

Para expresar estas situaciones se utilizan los números negativos. Diremos:

- El ascensor está en el piso -2.
- La temperatura es de – 3º.

Al conjunto de los números naturales con los signos + y – delante se les llama números enteros. Cuando tienen delante el signo + se dice que son **positivos** y si tienen delante el signo – se dice que son **negativos**.

El 0 también es un número entero que no se considera ni positivo ni negativo.

Cuando un número no tiene delante ningún signo se considera positivo. Es lo mismo 5 que +5.

Conjunto de números enteros = Z = { … -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 … }

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

Para sumar y restar dos números enteros, primero quitaremos los paréntesis siguiendo la regla de los signos que tenemos en el siguiente apartado.

Cuando ya tengamos quitados los paréntesis, sumaremos y restaremos de la siguiente forma:

1. Si los dos números tienen el mismo signo, se suman y se deja ese signo en el resultado.

   Ej: $-(-3)+(+4)=+3+4=+7$
   $-7-(+5)=-7-5=-12$

2. Si los números tienen distinto signo, se restan y se deja el signo del mayor.

   Ej: $-(+3)-(-5)=-3+5=+2$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Para multiplicar o dividir números enteros, primero haremos las operaciones con los signos, y luego con los números (sin signos).

Regla de los signos:

$$+ \cdot + \;=\; +$$
$$+ \cdot - \;=\; -$$
$$- \cdot + \;=\; -$$
$$- \cdot - \;=\; +$$

Ej: $(-2) \cdot (-4) = +8$
$(+3) \cdot (-5) = -15$
$(-12) : (+6) = -2$

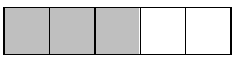
3. Operaciones con fracciones.

En la vida nos encontramos muchas veces con situaciones que no se resuelven con números enteros: cuando tenemos que repartir una pizza en porciones, cuando vamos a la compra y no queremos 1 Kg de jamón, sino sólo una parte de ese kg…

Para expresar estas situaciones necesitamos otro tipo de números: los números fraccionarios.

Una **fracción** es el resultado de dividir la unidad en partes. La fracción consta de dos números $\frac{a}{b}$, dónde a y b son números enteros, con b distinto de cero. Llamaremos a b **denominador** y nos indica el número de partes iguales en las que dividimos la unidad, y a es el **numerador** e indica cuantas de esas partes cogemos.

Así la fracción $\frac{3}{5}$ significa que hemos dividido la unidad en 5 partes iguales y hemos tomado 3.



Una fracción $\frac{a}{b}$ también puede indicar el resultado de dividir a entre b (a:b).

Dependiendo del denominador, las fracciones se leen: a unidades (denominador 1), medios (2), tercios (3), cuartos (4), quintos (5), sextos (6), séptimos (7), octavos (8), novenos (9), décimos (10), etc…

A partir del 10, podemos utilizar también la nomenclatura número + avos (dieciseisavos, doceavos, etc…)

PROPIEDADES

a) $\frac{a}{1} = a$

b) $\frac{0}{b} = 0$

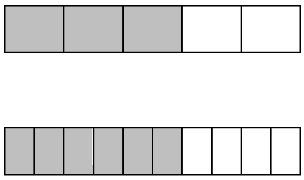
c) $\frac{a}{a} = 1$

d) $\frac{a}{0}$ no existe

FRACCIONES EQUIVALENTES

Son las que representan la misma parte de la unidad o el mismo número decimal.

Así, la fracción $\frac{3}{5}$ es equivalente a $\frac{6}{10}$.



Para comprobar si dos fracciones son equivalentes, se multiplica en cruz.

Ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ porque $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 12$

Para calcular fracciones equivalentes a una dada, multiplicamos o dividimos numerador y denominador por el mismo número.

Ejemplo: $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \ldots$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Se trata de conseguir una fracción equivalente con el numerador y denominador más pequeños posibles. Hay varias formas de conseguirlo.

Una forma es ir dividiendo numerador y denominador por el mismo número mientras se pueda.

Ejemplo: $\frac{28}{36} = \text{(entre2)} = \frac{14}{18} = \text{(entre2)} = \frac{7}{9}$

Otra forma consiste en descomponer numerador y denominador en factores primos y tachar los factores repetidos.

Ejemplo: $\frac{36}{40} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10}$

Otra forma es dividir numerador y denominador por el mcd de ambos.

Cuando una fracción no se puede simplificar más diremos que es **irreducible**.

Una fracción irreducible nunca puede tener el denominador negativo. Si se presentase ese caso, tomaríamos como fracción irreducible sus equivalentes con denominador positivo.

Ejemplo: $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$ y $\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

<u>NOTA</u>

Cualquier fracción de la forma $\frac{-a}{b}$ **es equivalente a la fracción** $\frac{a}{-b}$ **y a** $-\frac{a}{b}$

Cualquier fracción de la forma $\frac{-a}{-b}$ **es equivalente a la fracción** $\frac{a}{b}$

<u>REDUCCIÓN DE FRACCIONES AL MISMO DENOMINADOR</u>

Para reducir dos o más fracciones al mismo denominador se halla el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los denominadores y se pone como denominador de todas las fracciones. Para hallar el numerador de cada fracción, se divide el m.c.m. por el denominador que tenía la fracción y el cociente obtenido se multiplica por el numerador.

Veámoslo con un ejemplo $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{5}$.

1. Calculamos el mcm de los denominadores.

   Mcm (3, 5) = 15

2. Éste será el denominador de las fracciones resultantes, el nuevo denominador común.

3. Para calcular el nuevo numerador de cada fracción, dividimos el denominador común por el denominador que tenía y se multiplica por el numerador.

   $\frac{10}{15}$ y $\frac{18}{15}$

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

1. Si tienen el mismo denominador, sumamos o restamos los numeradores y dejamos el mismo denominador.

   Ejemplos:

   a. $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$
   b. $\frac{12}{5}-\frac{7}{5}=\frac{5}{5}=1$

2. Si tienen distinto denominador, primero las pasaremos a denominador común y luego procederemos como hemos visto anteriormente.

   Ejemplo: $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

   Nota: Cuando en una operación con fracciones aparezcan números enteros, pondremos éstos en forma de fracción, poniéndoles un 1 como denominador.

   Ejemplo: $3-\frac{1}{5}=\frac{3}{1}-\frac{1}{5}=\frac{15}{5}-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores por una parte y los denominadores por otra, siguiendo la siguiente regla:

$$\mathbf{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{6}{77}$

b) $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir, se multiplican en cruz numeradores y denominadores, siguiendo la siguiente regla:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} : \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a \cdot d}}{\mathbf{b \cdot c}}$$

Ejemplo: $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

NÚMERO DECIMAL Y NÚMERO FRACCIONARIO

Has visto que hay muchas situaciones en la vida real en las que no tomamos unidades enteras, sino sólo parte de ellas. Estas situaciones se expresan mediante los números fraccionarios. Pero hay otra forma de expresarlas, que es utilizando los números decimales.

Un **número decimal** es una secuencia de cifras separadas por una coma. Consta de:

- **Parte entera**: antes de la coma
- **Parte fraccionaria**: después de la coma

Ejemplo: 21,3

Para escribir una fracción en forma decimal se divide el numerador entre el denominador.

Ejemplo: $\frac{4}{5} = 0{,}8$

Pueden darse los siguientes casos:

1. El número decimal es **exacto** (Al hacer la división llega un momento en que el resto da 0)

2. El número decimal es **periódico** (Nunca da 0 el resto de la división, y el cociente es un número decimal con infinitas cifras decimales que se repiten indefinidamente)

Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}33333333333......$

A la cifra o cifras que se repiten se les llama **periodo** y se escriben debajo de un arquito (ˆ)

Ejemplo: $3{,}\overline{48} = 3{,}484848484848....$

Hay dos tipos de decimales periódicos:

- Periódicos **puros**: El periodo comienza detrás de la coma.
- Periódicos **mixtos**: Entre la coma y el periodo hay una o varias cifras decimales.

Ejemplo: $2{,}31\overset{\frown}{4} = 2{,}31444444\ldots..$

A las cifras que hay entre la coma y el periodo se les llama **anteperiodo**.

4. Potencias

Una **potencia** es una expresión del tipo 2^3 dónde 2 es la **base** y 3 el **exponente**. Su significado es el de multiplicar la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Cuando un número está elevado a exponente 2 se dice que está elevado al **cuadrado** y cuando tiene exponente 3, que está elevado al **cubo**.

Propiedades:

1. Cualquier número elevado a 0 siempre da 1. Ej: $2^0 = 1$
2. Cualquier número elevado a 1 es el mismo número. Ej: $3^1 = 3$

POTENCIAS DE BASE NEGATIVA

Al elevar un número negativo a un exponente par el resultado es un número positivo, y al elevarlo a un exponente impar, el resultado es negativo.

$(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

POTENCIAS DE BASE FRACCIONARIA

Para elevar una fracción a un exponente, se elevan por separado el numerador y el denominador a dicho exponente.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

OPERACIONES CON POTENCIAS

1. Para multiplicar potencias de la misma base, dejamos la base y sumamos los exponentes. Ej: $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$
2. Para dividir potencias de la misma base, dejamos la base y restamos los exponentes. Ej: $2^9 : 2^5 = 2^4$
3. Para calcular la potencia de una potencia, dejamos la base y multiplicamos los exponentes. Ej: $(2^3)^4 = 2^{12}$
4. Para multiplicar potencias del mismo exponente, multiplicamos las bases y dejamos el exponente. Para dividir potencias del mismo exponente, dividimos las bases y dejamos igual el exponente. Ej: $6^5 : 3^5 = 2^5$

5. Raíces

A los números 1, 4, 9, 16, 25… se les llama **cuadrados perfectos** porque son números de la forma n^2.

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$ ….

Como 16 es el cuadrado de 4, se puede decir también que la **raíz cuadrada** de 16 es 4.

El signo de la raíz cuadrada es $\sqrt{}$

Así decimos que $\sqrt{16} = 4$.

Sin embargo, ya hemos visto anteriormente que también $(-4)^2 = 16$, luego, también podemos decir que $\sqrt{16} = -4$. Esto se expresa así:

$$\sqrt{16} = \pm\ 4$$

EJERCICIOS

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $22 + 143 - 75 =$
b) $7 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 8 \cdot 3 =$
c) $4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 =$
d) $24 : 4 \cdot 6 - 10 + 3 \cdot 2 =$
e) $3 + 4 \cdot (2 + 5) - 1 + 63 =$
f) $10 + 3 \cdot (62 - 18) - 35 =$
g) $7 \cdot 2 + (7 + 3 - 4) \cdot 5 - 1 + 3 \cdot 9 =$
h) $25 \cdot 2 - [(5 \cdot 3 + 1) \cdot 2] =$
i) $(8 - 2) \cdot 3 - [5 \cdot 2 - (4 + 5)] =$

2. Realiza las siguientes sumas y restas:

a) 15 + 7 – (-8) + (-9) =
b) 12 + (-10) – 5 – (-21) =
c) (-8) + 12 + (-5) – 3 =
d) (-6) – (6 + 3) =
e) 1 – (-7 + 4) + (-2) =
f) 12 – (-8 + 4 – 5) + (-1) =

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) 12 · (-4) =
b) 3 · (-5 + 2) =
c) 2 · (-3 + 1) =
d) 4 · (-3) · (-5) =
e) 2 · (-3) · (-5) =
f) 2 · 3 · (-5) =
g) 1· (-2) · 3 · (-5) =
h) 15 : (-3) =
i) 12 : 4 =
j) 3 : 3 =
k) (-15) : (-5) =
l) 30 : (-7 + 10) =
m) (-10 + 2) : (-2) =
n) [- 8 · 5 · (-9)] : 12 =
o) [- 4 · (-2) · 7] : (-14) =
p) -(-2) · 5 · (-12) : (-4) =
q) (-18) : 3 · (-2) =
r) (-18) : [3 · (-2)] =

4. Busca tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{-2}{3}$ c) $\frac{5}{-3}$

5. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes o no:

a) $\frac{5}{9}$ y $\frac{12}{20}$ b) $\frac{3}{81}$ y $\frac{2}{54}$

6. Halla la fracción irreducible:

a) $\frac{12}{16}$ b) $\frac{14}{21}$ c) $\frac{-9}{12}$ d) $\frac{54}{60}$

e) $\frac{30}{48}$ f) $\frac{-125}{-600}$ g) $\frac{-68}{51}$ h) $\frac{49}{-14}$

7. Reduce a denominador común:

a) $\frac{30}{40}$ y $\frac{7}{24}$ *b*) $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{9}$

8. Realiza las siguientes operaciones, simplificando la fracción resultante al máximo:

a) $\frac{5}{9}-\frac{7}{12}$

b) $2-\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{8}\right)$

d) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right)-\left(\frac{3}{10}-\frac{3}{5}\right)$

e) $\frac{3}{-7}+\frac{2}{21}-\frac{1}{-14}$

9. Realiza las siguientes operaciones, simplificando la fracción resultante al máximo:

a) $\frac{4}{-9}\cdot\frac{-3}{5}$

b) $3\cdot\frac{4}{5}$

c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{-7}:\frac{3}{5}=$

e) $1:\frac{4}{5}=$

10. Realiza las siguientes operaciones, simplificando la fracción resultante al máximo:

a) $\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{2}:\frac{7}{8}\right)$

b) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{10}\right)$

c) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$

d) $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)$

11. Escribe en forma de decimal las siguientes fracciones e indica qué tipo de número decimal son:

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{19}{11}$ d) $\frac{2}{25}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{7}{20}$

12. Calcula:

a) 2^4 b) 10^3 c) 3^2 d) 5^3

13. Expresa los siguientes números en forma de potencia:

a) 128 b) 243 c) 25 d) 1000

14. Calcula:

a) $(-2)^4$ b) $(-10)^3$ c) $(-3)^2$ d) $(-5)^3$

15. Calcula:

$a)\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ $b)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$ $c)\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$ $c)\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

16. Calcula expresando el resultado en forma de potencia:

a. $2^{10} \cdot 2^5 =$
b. $2^{10} : 2^5 =$
c. $(2^3)^6 =$
d. $5^3 \cdot 7^3 =$
e. $6^3 : 2^3 =$
f. $(5^2)^0 =$
g. $7 \cdot 7^6 =$
h. $5^7 : 5^2 =$
i. $((2^5)^3)^2 =$
j. $(1^3)^9 =$
k. $(0^5)^8 =$

17. Calcula las raíces cuadradas, positivas y negativas, de los siguientes números:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt{225}$ d) $\sqrt{356409}$