TEMA 2. ECUACIONES

1. Ecuaciones. Ideas básicas.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas en las que aparecen números, signos, operaciones y letras. Estas letras son unas cantidades desconocidas que se llaman **incógnitas** y se le representan por la letra **x, y, z…**

Utilizamos **ecuaciones** cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad desconocida, pero de la que sabemos que cumple algunas condiciones.

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de la o las incógnitas que hacen que la igualdad sea cierta.

Ejemplo 1:

Se reparten 40€ para dos personas de manera que una recibe 10€ más que la otra. ¿Cuánto recibe cada una?

Este problema se resuelve planteando la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x + (x + 10) = 40}$$

dónde "x" es el dinero que recibe la 1ª persona (la que recibe menos).

Aún no hemos resuelto el problema, nuestro primer paso ha sido plantearlo y escribirlo en forma de ecuación.

2. Elementos de una ecuación

- **Miembros**: Son las expresiones que aparecen a cada lado de la igualdad. El de la izquierda se llama 1er miembro y el de la derecha 2º.

- **Términos**: Son los sumandos que aparecen.

- **Soluciones**: Son los valores que toman las incógnitas para que la igualdad sea cierta.

- **Grado de una ecuación**: Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros.

Ejemplo 2:

$3x - 5 = 7 - 2x$

1er miembro: $3x - 5$
2º miembro: $7 - 2x$
Términos: 3x, -5, 7 y -2x
Solución: x=12/5
Grado:1

Ejemplo 3:

$3x^2 = 48$

1er miembro: $3x^2$
2º miembro: 48
Términos: $3x^2$, 48
Soluciones: x=4 y x=-4
Grado:2

Las ecuaciones pueden tener más de una incógnita, y pueden ser de diversos tipos. Nosotros, en este tema nos centraremos en las ecuaciones polinómicas de primer y segundo grado con una única incógnita.

3. Ecuaciones de 1er grado con una incógnita.

Para resolverlas, seguiremos tres pasos básicos:

1º) Pasaremos a un lado de la igualdad (uno de los miembros) todos los términos que contengan la x (monomios de primer grado) y al otro miembro los números.

Para ello tendremos en cuenta que para pasar de un miembro al otro hemos de cambiar el signo. Es decir, lo que está sumando pasa restando y viceversa.

$3x - 2 = -7x + 9$
$3x + 7x = 9 + 2$

2º) Agruparemos los monomios del mismo tipo, sumando o restando los términos.

$10x = 11$

3º) Despejaremos la incógnita x, es decir, la dejaremos sola en un miembro de la ecuación. Para ello, el número que la está multiplicando pasará al otro miembro dividiendo:

$$x = \frac{11}{10}$$

De esta manera hemos obtenido la solución de la ecuación.

4. Ecuaciones de 1^er^ grado con paréntesis

En una ecuación que contenga paréntesis, antes de realizar los pasos descritos anteriormente, hemos de quitar paréntesis. Para ello, si delante del paréntesis hay:

a) Un signo + : lo dejamos todo igual.
b) Un signo - : Cambia el signo de todos los términos de dentro del paréntesis.
c) Un número: Multiplicamos dicho número por todos los términos del paréntesis.

Ejemplo 4:

$4(x - 6) = x - (x + 4)$

$4x - 24 = x - x - 4$
$4x - x + x = -4 + 24$
$4x = 20$
$x = \frac{20}{4} = 5$

5. Ecuaciones de 1^er^ grado con denominadores

Si tenemos algún denominador en nuestra ecuación, lo primero que hemos de hacer es quitarlos.

Para ello, pondremos un 1 como denominador en las expresiones que no sean fraccionarias y reduciremos todos los términos a común denominador (hallando el m.c.m. de los denominadores).

Finalmente, cuando tengamos el mismo denominador en todas las expresiones, podremos eliminarlo.

Ejemplo 5:

$$\frac{x}{15} + x = \frac{2x}{5} + 10$$

$$\rightarrow \quad \frac{x}{15} + \frac{x}{1} = \frac{2x}{5} + \frac{10}{1} \quad \rightarrow \quad \text{m.c.m. } (15, 5) = 15$$

$$\rightarrow \quad \frac{x}{15} + \frac{15x}{15} = \frac{6x}{15} + \frac{150}{15} \quad \rightarrow \quad x + 15x = 6x + 150 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x + 15x - 6x = 150 \quad \rightarrow \quad 10x = 150 \quad \rightarrow \quad x = \frac{150}{10} = 15$$

Ejemplo 6:

$$\frac{5}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{7x}{3}+1$$ → mcm(4, 2, 3) = 12 →

→ $$\frac{15}{12}-\frac{4x-12}{12}=\frac{28x}{12}+\frac{12}{12}$$

<u>Atención</u> cuando quitemos los denominadores, ya que un signo negativo delante de una fracción cambia el signo de todos los términos de ésta como si fuese un paréntesis.

→ 15 – 4x + 12 = 28x + 12 → 15 + 12 – 12 = 28x + 4x →

→ 15 = 32x → 32x = 15 → x = $\frac{15}{32}$

IMPORTANTE: Si al resolver una ecuación nos aparece alguno de los siguientes casos, procederemos como se indica a continuación:

0x = 0. La ecuación tiene infinitas soluciones.
0x = número distinto de 0. La ecuación no tiene solución.

Ejemplo 7:

3(x-1) – 2x = 5 + x → 3x – 3 – 2x = 5 + x →
3x – 2x – x = 5 + 3 → 0x = 8 → No tiene solución

2x + 1 = 2(x – 1) + 3 → 2x + 1 = 2x – 2 + 3 → 3x – 3x = -2 + 3 – 1 →
0x = 0 → Todos los números son solución.
Tiene infinitas soluciones.

Cuando en una ecuación con denominadores tan sólo tengamos un término a cada lado del signo igual, en lugar de hacer el mínimo común múltiplo, podemos multiplicar en cruz e igualar los resultados.

Ejemplo 8:

$$\frac{\mathbf{3x-2}}{\mathbf{5}}=\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}$$ → 2(3x – 2) = 5x → 6x – 4 = 5x → 6x – 5x = 4 → x = 4

6. Ecuaciones de 2º grado

Las ecuaciones de segundo grado son aquellas en las que en algunos de sus términos aparece un monomio de grado 2 ($x^{2)}$, no conteniendo términos de mayor grado. Por ejemplo:

$4x^2 – 6 + x = 3 – x^2$

Esta ecuación se debe reducir pasando todos los términos a un solo miembro y simplificando:

$4x^2 – 6 + x – 3 + x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 5x^2 + x – 9 = 0$

Llamamos **a** al coeficiente de x^2, **b** al coeficiente de x y **c** al término independiente, quedando una ecuación genérica de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.

Si $\mathbf{b \neq 0}$ y $\mathbf{c \neq 0}$ se dice que la ecuación es **completa**. En otro caso, si $\mathbf{b = 0}$ o $\mathbf{c = 0}$ es **incompleta** .

Resolución de ecuaciones de 2º grado

Distinguiremos tres tipos, las incompletas en las que falta el término b, las incompletas en las que el término que falta es el c y las completas

7. Tipo: ax2 + c = 0 (Falta la b)

Ejemplo 9:

$\mathbf{2x^2 – 8 = 0}$

1) Despejamos x^2

$2x^2 = 8 \quad \rightarrow \quad x^2 = 8/2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4$

2) Tomamos raíces:

$x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$

8. Tipo: ax2 + bx = 0 (Falta la c)

Ejemplo 10:

$x^2 - 7x = 0$

1) Sacamos factor común una x

   $x \cdot (x - 7) = 0$

2) Si el producto de dos factores es igual a cero, necesariamente uno de los factores ha de ser cero, lo que nos da dos opciones:

   $x = 0$ (Primera solución)

   $x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$ (Segunda solución)

9. Tipo: ax2 + bx + c = 0

Para resolver este tipo de ecuaciones, se utiliza la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 11:

$3x^2 - 7x + 2 = 0$ (a = 3, b = -7, c = 2)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Discriminante

Se llama discriminante de una ecuación de segundo grado a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ (la expresión que aparece dentro de la raíz en la fórmula)

- Si $\Delta > 0$ hay dos soluciones distintas.
- Si $\Delta = 0$ tan sólo hay una solución.
- Si $\Delta < 0$ no hay solución real.

10. Ecuaciones de 2º grado con paréntesis y denominadores

Cuando una ecuación de segundo grado tenga paréntesis, denominadores, o simplemente no esté ordenada para aplicar la fórmula, procederemos en el siguiente orden:

1. Quitaremos los paréntesis y los denominadores.
2. Pasaremos todos los términos de la ecuación a un lado y en el otro dejaremos un 0.
3. Agruparemos términos semejantes y resolveremos la ecuación

Ejemplo 12:

3x + 2x2 = 2 + x2 + 4x

Pasamos todos los términos al primer lado:

$\rightarrow \; 3x + 2x^2 - 2 - x^2 - 4x = 0$

Agrupamos términos semejantes:

$\rightarrow \; x^2 - x - 2 = 0$

Resolvemos la ecuación aplicando la fórmula, y da como solución 2 y -1.

Ejemplo 13:

$4 + 2x(x + 1) = x(x + 7)$

Quitamos paréntesis, teniendo en cuenta que $x \cdot x = x^2$

$\rightarrow \; 4 + 2x^2 + 2x = x^2 + 7x$

Pasamos todos los términos al primer lado:

$\rightarrow \; 4 + 2x^2 + 2x - x^2 - 7x = 0$

Agrupamos los términos semejantes:

$\rightarrow \; x^2 - 5x + 4 = 0$

Y resolvemos la ecuación que da por solución 4 y 1.

Ejemplo 14:

$$\frac{\mathbf{x-3}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1} = \frac{\mathbf{x^2+5}}{\mathbf{3}}$$

Quitamos denominadores haciendo el m.c.m.

$\frac{3x-9}{6} + \frac{6}{6} = \frac{2x^2+10}{6}$ $\rightarrow 3x - 9 + 6 = 2x^2 + 10$

Pasamos todos los términos a un lado (en este caso al segundo):

$\rightarrow 0 = 2x^2 + 10 - 3x + 9 - 6 \rightarrow 2x^2 - 3x + 13 = 0$

Y resolvemos la ecuación. En este caso no tiene solución.

11. Ecuación (x – a)·(x – b) = 0

Para que un producto de varios factores sea cero, al menos uno de ellos ha de ser cero.

Por lo tanto, para resolver este tipo de ecuaciones, se igualan a cero cada uno de los factores.

Ejemplo 15:

$(x - 3)\cdot(x + 1) = 0$

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$
$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Las soluciones son 3 y -1.

12. Problemas que dan lugar a ecuaciones.

Las ecuaciones de segundo grado, al igual que las de primero, aparecen en multitud de ocasiones en la resolución de distintos problemas de la vida real.

Para traducir un problema al lenguaje algebraico y encontrar su solución, lo primero y más importante es leer con mucha atención el enunciado entendiéndolo completamente. Después debes seguir los siguientes pasos:

1) Establecer con precisión cuál será la incógnita.

2) Expresar como una ecuación la relación contenida en el enunciado.
3) Resolver la ecuación
4) Interpretar la solución de la ecuación en el contexto del enunciado.
5) Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones pedidas.

Ejemplo 16:

Al sumar el triple de un número con la mitad de dicho número se obtiene 126. ¿De qué número se trata?

1. La incógnita x será el número que nos piden
2. Escribimos la ecuación que verifica:

$$\frac{x}{2}+3x=126$$

3. Resolvemos la ecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{6x}{2}=\frac{252}{2} \quad \rightarrow \quad x + 6x = 256 \quad \rightarrow \quad 7x = 256 \quad \rightarrow \quad x = \frac{252}{7}=36$$

4. El número buscado es el 36

5. Se puede comprobar ya que su mitad es 18 y su triple 108 y al sumarlos da 126.

Ejemplo 17:

El cuadrado de un número natural más su doble es igual a 24. Calcula dicho número.

Llamamos x al número que buscamos.

La ecuación es: $x^2 + 2x = 24$

Resolvemos: $x^2 + 2x - 24 = 0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-24)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{100}}{2}=$$
$$=\frac{-2\pm 10}{2}=\left\langle\begin{matrix}4\\-6\end{matrix}\right.$$

La solución es el número 4 (El -6 no sirve porque no es un número natural, como pedía el enunciado).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

a) 3x = 4 + 2x

b) 2x + 3 = x + 11

c) x – 6 = 5x – 34

d) 4 (x – 6) = 2 (x – 4)

e) 5 (x – 1) – 12 = 2 (x + 3)

f) 5 (x – 3) + 8x = 6x – 5 + x

g) 2 – (3x – 5) = 4 – 2x + 3 – x

h) 5 (3x – 1) – 2 (4x – 3) = 15

i) 3 (x + 4) – 6x = 8 – 3 (x – 5)

j) 15 – 6 (2x – 4) = 8 + 2 (5x – 1)

k) $\frac{x}{15} + x = \frac{25}{5} + 10$

l) $x + \frac{5x}{2} = 5 - \frac{3x}{2}$

m) $3x - \frac{2x}{5} = \frac{3x}{2} - 11$

n) $\frac{x}{6} - \frac{2}{3} = x + \frac{1}{6}$

o) $x - \frac{3}{4} = \frac{x}{8} + 1$

p) $\frac{x}{15} - \frac{x}{10} = \frac{1}{4} - \frac{x}{20}$

q) $2 + \frac{x-1}{2} = x - 1$

r) $\frac{1-x}{3} - \frac{x-1}{12} = \frac{3x-1}{4}$

s) $3(x+1) - \frac{x-3}{4} = x + \frac{1}{3}$

t) $\frac{2(2x+3)}{3} = \frac{5(x-2)}{2}$

u) $\frac{6(3x-4)}{3} = 2(5x+4)$

2. Sabemos que la suma de tres números consecutivos es 63. Calcula dichos números.

3. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor, ¿de qué números se trata?

4. Calcula un número cuyo triple más 7 unidades da 22.

5. Calcula un número que se triplica al sumarle 26.

6. Halla el número cuya mitad, tercera y cuarta parte suman 39.

7. Calcula un número que al restarle 36 se convierta en su cuarta parte.

8. Calcula tres números sabiendo que:
    1. El primero es 20 unidades menor que el segundo.
    2. El tercero es igual a la suma de los dos primeros.
    3. Entre los tres suman 120.

9. Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 14,30 €. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y éste cuesta el doble que el helado. ¿Cuál era el precio de cada artículo?

10. Me faltan 1,8 € para comprar mi revista de informática preferida. Si tuviera el doble de lo que tengo ahora, me sobrarían 2 €. ¿Cuánto tengo? ¿Cuánto cuesta la revista?

11. Un kilo de manzanas cuesta el doble que uno de naranjas. Por tres kilos de naranjas y uno de manzanas he pagado 6 €. ¿A cuánto están las manzanas y las naranjas?

12. Natalia tiene 4 € más que Andrés, pero la mitad que Rosa. ¿Cuánto tiene cada uno si entre los tres juntan 40 €?

13. Tengo 4 años más que mi hermano. Calcula nuestras edades sabiendo que entre los dos sumamos 56 años.

14. Entre un padre y sus dos hijas tienen 48 años. La edad de la hija mayor es triple que la de la menor. La edad del padre es el quíntuplo de la suma de las edades de las hijas. ¿Cuál es la edad de cada uno?

15. Las edades de Juan, Carmela y Rosa suman 39 años. Carmela tiene cinco años menos que Juan y dos más que Rosa. ¿Cuál es la edad de cada uno?

16. La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿qué edad tiene cada uno?

17. ¿Qué edad tiene Rosa sabiendo que dentro de 56 años tendrá cinco veces la edad actual?

18. María tiene 5 años más que su hermano Luís, y su padre tiene 41 años. Dentro de 6 años, entre los dos hermanos igualarán la edad del padre, ¿qué edad tiene cada uno?

19. La edad de un hijo es la cuarta parte de la edad del padre. Hace 5 años la edad del hijo era la séptima parte de la del padre. ¿Qué edad tienen?

20. Un padre tiene 36 años y su hijo 10, ¿Cuántos años tienen que pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

21. Un joven gasta 1/5 de su dinero en transporte, ¼ en el cine y 3/8 en libros. Si aún le quedan 3,5 €, ¿cuánto tenía?

22. ¿Con cuánto dinero salí de casa esta mañana, si después de gastar la tercera parte y 700 pesetas más, todavía me queda la quinta parte de lo que tenía?

23. Un granjero lleva al mercado una cesta de huevos, con tan mala suerte que tropieza y se le rompen 2/5 de la mercancía. Entonces vuelve al gallinero y recoge 21 huevos más, con lo que ahora tiene 1/8 más de la cantidad inicial. ¿Cuántos huevos tenía al principio?

24. Un depósito de agua que estaba lleno, el lunes se gastaron 2/7; el martes 1/6; y el miércoles 1/5 de su capacidad, quedando aún 7300 litros. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

25. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 36 = 0$
b) $4x^2 - 9 = 0$
c) $x^2 + 9 = 0$
d) $x^2 - 6x = 0$
e) $3x^2 + 5x = 0$
f) $2x^2 - 11x = 0$
g) $x^2 - 6x + 5 = 0$
h) $x^2 - 7x + 10 = 0$
i) $x^2 - 3x - 4 = 0$
j) $3x^2 + 17x + 20 = 0$
k) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
l) $x^2 - 6x + 9 = 0$
m) $x^2 - x + 1 = 0$
n) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + x\cdot(x - 3) = 5x + 2$
b) $3(x^2 + 5) = x^2 + 40$
c) $3x^2 - 2(x + 5) = (x + 3) - 19$
d) $(5x - 4)\cdot(x + 3) = 5$
e) $\dfrac{x^2 - 3x}{2} - 5 = \dfrac{x - 20}{4}$
f) $(x - 2)\cdot(x + 3) = 0$
g) $(3x - 1)\cdot(x - 5) = 0$
h) $x\cdot(x + 9) = 0$
i) $(2x + 8)\cdot(3x - 9) = 0$

27. La suma de un número natural y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?

28. El producto de un número natural por su siguiente es 272. Calcula dichos números.

29. Encuentra dos números positivos que se diferencien en 7 unidades sabiendo que su producto es 44.

30. Si al cuadrado de un número le quitas su doble, obtienes su quíntuplo, ¿de qué número se trata?

31. Un campo de fútbol mide 30m. más de largo que de ancho y su área es 7000 m2. Halla sus dimensiones.

32. En un rectángulo de 24 cm. de perímetro, sabemos que la base es igual al cuadrado de la altura. Halla sus dimensiones.

33. La base de un rectángulo es 10 cm. más larga que su altura. Su área mide 600 cm2. Calcula las dimensiones del rectángulo.