

## TEMA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES

Llamaremos sistema de ecuaciones a un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas que deben cumplirse a la vez. Es decir, resolver el sistema consiste en calcular el valor de las incógnitas que satisfagan todas las ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 5xy + z = 7 \\ x + y = 1 \end{array} \right\}$$

Diremos que el sistema de ecuaciones es lineal cuando en las ecuaciones no aparezca ninguna incógnita elevada a exponentes (p. ej.  $x^2$ ,  $y^3$ , ...) ni ningún producto de incógnitas ( $x \cdot y$ ,  $x^2 \cdot y$ , ...).

Llamamos sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $x$ ,  $y$ ) a una expresión como la siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene por solución  $x = 4$ ,  $y = 1$ , ya que estos valores hacen que ambas ecuaciones sean ciertas.

Diremos que dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Existen diversos métodos numéricos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: sustitución, igualación y reducción.

### MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 12 \\ 2x + y = 9 \end{array} \right\} \rightarrow x = 12 - 2y$$

2. Se sustituye la incógnita que acabamos de despejar en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación con una incógnita.

$$2(12 - 2y) + y = 9$$

3. Se resuelve la ecuación.

$$24 - 4y + y = 9 \rightarrow -4y + y = 9 - 24 \rightarrow -3y = -15$$

$$y = \frac{-15}{-3} = 5$$

4. El valor obtenido es la solución para una incógnita. Ahora lo sustituimos en la incógnita que habíamos despejado en el paso 1 para obtener el valor de la otra incógnita.

$$x = 12 - 2y = 12 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2$$

5. Ya tenemos la solución del sistema:  $x = 2$ ,  $y = 5$ .

### MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 5 - 3x \\ \rightarrow y = 2x \end{array}$$

2. Igualamos las dos expresiones obtenidas.

$$5 - 3x = 2x$$

3. Resolvemos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 2x \\ 5 &= 5x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

4. Con el valor obtenido, hallamos la otra incógnita.

$$y = 2 \cdot 1 = 2$$

5. Ya tenemos la solución del sistema:  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

### MÉTODO DE REDUCCIÓN

1. Hemos de conseguir que al sumar o restar ambas ecuaciones se anule una incógnita. Para ello, multiplicaremos si es necesario, alguna ecuación por un número.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 3 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \quad (-2) \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{array} \right\}$$

(Multiplicando por -2 la segunda ecuación)

2. Sumamos o restamos.

$$\text{Al sumar queda } 5x = 5$$

3. Resolvemos la ecuación resultante.

$$x = 1$$

4. Con el valor obtenido, hallamos la otra incógnita.

$$\text{Sustituyendo en la segunda ecuación } 1 + y = 1, y = 0$$

5. Ya tenemos la solución del sistema:  $x = 1, y = 0$ .

## CLASIFICACIÓN

Si cuando resolvemos un sistema de ecuaciones nos aparece una expresión del tipo:

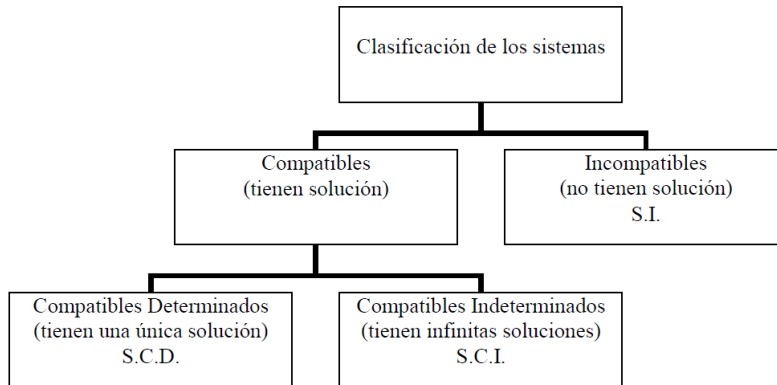
1.  $0x = 3$ , ó  $0y = 4$  (cualquier número distinto de cero), el sistema no se puede resolver, porque cualquier valor de la incógnita que se multiplique por cero, siempre dará 0. Lo llamaremos SISTEMA INCOMPATIBLE (S.I.)

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -3 \\ y + 2 = x - 3 \end{array} \right\} x = y - 3 \rightarrow y + 2 = y - 3 - 3 \rightarrow y - y = -6 - 2 \rightarrow 0y = -8 \rightarrow \text{S. I.}$$

2.  $0x = 0$ ,  $0y = 0$ . El sistema tiene infinitas soluciones. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (S.C.I.)

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 9 \end{array} \right\} \text{ En este sistema, } (x = 1, y = 1), (x = 0, y = 2), \dots \text{ son soluciones.}$$

Después de lo visto, podemos establecer la siguiente clasificación de los sistemas de ecuaciones:



## EJERCICIOS

1. Resuelve los siguientes sistemas por los tres métodos:

$$a) \begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 12 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3x - 5y = 17 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} 5x + y = 8 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a. \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} 3x + y = 4 \\ -6x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} x - 4y = 5 \\ 3x - 12y = 15 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \left. \begin{array}{l} 3x = 6 \\ 5x + \frac{4y}{3} = 14 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = \frac{1}{15} \\ 15x - 15y = 2 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 5x = 2y - 2 \\ 4x = 20 - 2y \end{array} \right\}$$

$$d) \left. \begin{array}{l} \frac{7x-9y}{2} - \frac{2x+4}{2} = -15 \\ 5(x-1+y) = 25 \end{array} \right\}$$

4. Calcula dos números cuya suma sea 191 y su diferencia 67.

5. Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es cinco y el doble de su diferencia es 8.

6. Dos kilos de peras y tres de manzanas cuestan 7,80€. Cinco kilos de peras y cuatro de manzanas cuestan 13,20€. ¿A cómo está el kilo de peras y de manzanas?

7. En un bar se venden bocadillos de jamón a 3,5 € y de tortilla a 2 €. En una mañana se vendieron 52 bocadillos y se recaudó 149 €. ¿cuántos bocadillos de cada clase vendieron?

8. En un test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 puntos por cada error. Si mi nota ha sido 10,5, ¿cuántos aciertos y errores he cometido?

9. Tenemos 53 céntimos repartidos en 16 monedas de 2 céntimos y de 5 céntimos, ¿cuántas monedas de cada clase tengo?

10. Una tienda de discos vende 84 discos a dos precios distintos: unos 18 € y otros a 14,4 €, obteniendo de la venta 1.242 €, ¿Cuántos discos vendió de cada clase?

11. Hemos comprado 3 canicas de cristal y 2 de acero por 1,45€ y, ayer, 2 de cristal y 5 de acero por 1,7€. Determinar el precio de una canica de cristal y de una de acero.